3.8.3 Definiční obor II

Předpoklady: 030802

Př. 1: Urči podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\frac{x}{x+3}$ b) $\frac{2}{2x-5}$ c) $\frac{2x+1}{x(y-2)}$ d) $\frac{2x}{x^2+1}$

a) $\frac{x}{x+3}$: $x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -3$

b) $\frac{2}{2x-5}$: $2x-5\neq 0 \Rightarrow 2x\neq 5 \Rightarrow x\neq \frac{5}{2}$

c) $\frac{2x+1}{x(y-2)}$: $x\neq 0$, $y-2\neq 0 \Rightarrow y\neq 2$

d) $\frac{2x}{x^2+1}$: $x^2+1\neq 0$ to platí vždy (x^2 je nezáporné číslo $\Rightarrow$ x^2+1 je větší nebo rovno 1) $\Rightarrow$ žádná podmínka.

Př. 2: Zapiš podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\frac{2}{ab}$ b) $\frac{xy}{x+y}$ c) $\frac{x}{y}$ d) $\frac{b}{a-b}$ e) $\frac{x+y}{3x-y}$

a) $\frac{2}{ab}$: $a\neq 0; b\neq 0$

b) $\frac{xy}{x+y}$: $x\neq -y$

c) $\frac{x}{y}$: $y\neq 0$

d) $\frac{b}{a-b}$: $a\neq b$

e) $\frac{x+y}{3x-y}$: $3x\neq y$

Př. 3: Které z následujících podmínek vyjadřují totéž:

a) $x\neq 2y$ b) $\frac{x}{2}\neq y$ c) $x\neq \frac{y}{2}$ d) $2x\neq y$ e) $x-2y\neq 0$

Totéž co podmínka $x\neq 2y$ vyjadřují podmínky:

- $\frac{x}{2}\neq y$ (převedeme úpravou $\frac{x}{2}\neq y \quad /\cdot 2$),
- $x-2y\neq 0$ (převedeme úpravou $x-2y\neq 0 \quad /+2y$).

Totéž co podmínka $x\neq \frac{y}{2}$ vyjadřují podmínky:

- $2x\neq y$ (převedeme úpravou $2x\neq y \quad /:2$).

Př. 4: Zapiš podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\frac{1}{a(a-2)}$ b) $\frac{x+2}{(x-1)(2x-3)}$ c) $\frac{a+b}{ab(a+2)}$ d) $\frac{x^2+1}{x(2x+1)(x-y)}$

Zformuluj obecný postup.

a) $\frac{1}{a(a-2)}$

- $a \neq 0$,
- $a-2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$

Celkově $a \neq 0; 2$.

b) $\frac{x+2}{(x-1)(2x-3)}$

- $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$,
- $2x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

Celkově $x \neq 1; \frac{3}{2}$.

c) $\frac{a+b}{ab(a+2)}$

- $a \neq 0$,
- $b \neq 0$,
- $a+2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$

Celkově $a \neq -2; 0$.

d) $\frac{x^2+1}{x(2x+1)(x-y)}$

- $x \neq 0$,
- $2x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$,
- $x-y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$

Celkově $x \neq -\frac{1}{2}; 0; y$.

Obecný postup: Pokud je jmenovatel součin více závorek, musíme podmínkou vyloučit všechny hodnoty proměnných, pro které je jakákoliv závorka nulová (každou závorku řešíme zvlášť).

Př. 5: Zapiš podmínky, za kterých jsou definovány následující lomené výrazy.

a) $\frac{b}{a^2+2a}$ b) $\frac{3}{x^3+x}$ c) $\frac{2x}{x^2-16}$ d) $\frac{2+x}{x^2+4x-12}$

e) $\frac{a+b}{a^4+2a^2b+b^2}$ f) $\frac{x^2+4x+4}{4x^2-9}$ g) $\frac{x-y^2}{x^2+xy+2x+2y}$

Zformuluj obecný postup.

Lomené výrazy neobsahují součin ve jmenovateli $\Rightarrow$ jmenovatele musíme nejdříve rozložit na součin.

a) $\frac{b}{a^2+2a}=\frac{b}{a(a+2)}$

- $a \neq 0$,
- $a-2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$

Celkově $a \neq 0; 2$.

b) $\frac{3}{x^3+x}=\frac{3}{x(x^2+1)}$

- $x \neq 0$,
- $x^2+1 \neq 0$, platí pro všechna reálná čísla x ($x^2>0 \Rightarrow$ po přičtení 1 získáme číslo větší než nula).

Celkově $x \neq 0$.

c) $\frac{2x}{x^2-16}=\frac{2x}{(x+4)(x-4)}$

d) $\frac{2+x}{x^2+4x-12}=\frac{2+x}{(x+6)(x-2)}$

- $x+4\neq 0 \Rightarrow x\neq -4$,
- $x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$

Celkově $x\neq \pm 4$.

e) $\dfrac{a+b}{a^4+2a^2b+b^2}=\dfrac{a+b}{\left(a^2+b\right)^2}$

- $a^2+b\neq 0 \Rightarrow b\neq -a^2$

- $x+6\neq 0 \Rightarrow x\neq -6$,
- $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

Celkově $x\neq -6;2$.

f) $\dfrac{x^2+4x+4}{4x^2-9}=\dfrac{x^2+4x+4}{(2x-3)(2x+3)}$

- $2x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -\dfrac{3}{2}$,
- $2x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq \dfrac{3}{2}$

Celkově $x\neq \pm\dfrac{3}{2}$.

g) $\dfrac{x-y^2}{x^2+xy+2x+2y}=\dfrac{x-y^2}{x(x+y)+2(x+y)}=\dfrac{x-y^2}{(x+y)(x+2)}$

- $x+y\neq 0 \Rightarrow x\neq -y$,
- $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$

Celkově $x\neq -2;\ x\neq -y$.

Ne vždy se rozklad mnohočlenu ve jmenovateli podaří. Například u lomeného výrazu $\dfrac{2x}{x^2+3x-1}$ žádnou z našich dosavadních metod součin nevytvoříme. V takových případech budeme psát podmínku pro celý jmenovatel (nebo jeho část, kterou nedokážeme rozložit) najednou: $x^2+3x-1\neq 0$.

Př. 6: Jsou podmínky, za kterých jsou definovány výrazy $\dfrac{1}{ab}$; $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$, stejné?

- $\dfrac{1}{ab}$: $a\neq 0$, $b\neq 0$ (musí platit obě podmínky najednou, jakmile bude jedna z obou proměnných rovna nule, je celý jmenovatel roven nule a zlomek není definovaný).
- $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$: $a^2+b^2\neq 0 \Rightarrow (a;b)\neq (0;0)$ (jmenovatel je roven nule, pouze když *a* i *b* jsou najednou (zároveň) rovny nule – nestačí, aby bylo nule rovno pouze *a* nebo pouze *b*).

Podmínky pro výrazy v zadání nejsou stejné. U prvního výrazu nesmí být rovna nule ani jedna proměnná, u druhého výrazu může být jedna z proměnných rovna nule, pokud je druhá nenulová.

Př. 7: Napiš lomený výraz s neznámou *x* ve jmenovateli, který:
a) je definován pro všechna reálná čísla,
b) není definován pro žádné reálné číslo.
Pokud existuje více možností, zkus je najít všechny.

a) je definován pro všechna reálná čísla,
Hledáme číslo, které má ve jmenovateli výraz, do kterého můžeme dosadit všechno (nikdy se nebude rovnat nule) $\Rightarrow$ možný výraz ve jmenovateli: x^2+1 (v nejhorším případu je hodnota větší nebo rovna 1).

V úvahu přicházejí i další výrazy, které se nedají rozložit na součin: x^2+2, x^2+3, ...
Čitatel může obsahovat cokoliv.

Část hledaných výrazů můžeme zapsat $\frac{1}{x^2+k}$, kde k je libovolné kladné číslo.

b) není definován pro žádné reálné číslo.
Jmenovatel lomeného výrazu se musí rovnat nule pro libovolnou hodnotu proměnné $\Rightarrow$ musí obsahovat rozdíl $x-x$, který může být vynásobený čímkoliv. Libovolný může být i čitatel.

Část hledaných výrazů můžeme zapsat $\frac{1}{k(x-x)}$, kde k je libovolné číslo.

Shrnutí: Složitější jmenovatele při zjišťování podmínek rozkládáme na součin.